$\boxed{1}$ (30 点)

座標空間における次の 3 つの直線 l, m, n を考える：

l は点 $\mathrm{A}(1,0,-2)$ を通り，ベクトル $\vec{u}=(2,1,-1)$ に平行な直線である.
m は点 $\mathrm{B}(1,2,-3)$ を通り，ベクトル $\vec{v}=(1,-1,1)$ に平行な直線である.
n は点 $\mathrm{C}(1,-1,0)$ を通り，ベクトル $\vec{w}=(1,2,1)$ に平行な直線である.

P を l 上の点として，P から m, n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする．このとき，$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を最小にするような P と，そのときの $\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を求めよ.

$\boxed{2}$ (30 点)

2 つの粒子が時刻 0 において $\triangle\mathrm{ABC}$ の頂点 A に位置している．これらの粒子は独立に運動し，それぞれ 1 秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする．たとえば，ある時刻で点 C にいる粒子は，その 1 秒後には点 A または点 B にそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する．この 2 つの粒子が，時刻 0 の n 秒後に同じ点にいる確率 $p(n)$ を求めよ.

$\boxed{3}$ (35 点)

$\triangle\mathrm{ABC}$ は，条件 $\angle\mathrm{B}=2\angle\mathrm{A}$，$\mathrm{BC}=1$ を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする．このとき，$\cos\angle\mathrm{B}$ を求めよ.

4

(35 点)

実数の定数 a, b に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+x+1}$$

で定める．すべての実数 x で不等式

$$f(x) \leqq f(x)^3 - 2f(x)^2 + 2$$

が成り立つような点 (a, b) の範囲を図示せよ．

5

(35 点)

自然数 a, b はどちらも 3 で割り切れないが，a^3+b^3 は 81 で割り切れる．このような a, b の組 (a, b) のうち，a^2+b^2 の値を最小にするものと，そのときの a^2+b^2 の値を求めよ．

6

(35 点)

双曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ の第 1 象限にある部分と，原点 O を中心とする円の第 1 象限にある部分を，それぞれ C_1, C_2 とする．C_1 と C_2 は 2 つの異なる点 A, B で交わり，点 A における C_1 の接線 l と線分 OA のなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ であるとする．このとき，C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ．

問題は，このページで終わりである．